



INDICE

CAPÍTULO PRIMERO

NÚMERO. VARIABLE. FUNCIÓN

§	1. Números reales. Representación de números reales por los puntos del eje numérico	1
§	2. Valor absoluto de un número real	3
§	3. Magnitudes variables y constantes	4
§	4. Dominio de definición de una variable	5
§	5. Variable ordenada. Variables crecientes y decrecientes. Variable acotada	7
§	6. Función	8
§	7. Formas diversas de expresión de funciones	9
§	8. Funciones elementales principales. Funciones elementales	11
§	9. Funciones algebraicas	16

CAPÍTULO II

LÍMITE Y CONTINUIDAD DE LAS FUNCIONES

§	1. Límite de una variable. Variable infinitamente grande	22
§	2. Límite de una función	25
§	3. Función que tiende a infinito. Funciones acotadas	28
§	4. Infinitésimos y sus propiedades fundamentales	32
§	5. Teoremas fundamentales sobre límites	35
§	6. Límite de la función $\frac{\text{sen } x}{x}$ cuando $x \rightarrow 0$	40
§	7. El número e	42
§	8. Logaritmos naturales	47
§	9. Continuidad de las funciones	49
§	10. Propiedades de las funciones continuas	53
§	11. Comparación de infinitésimos	56

CAPÍTULO III

DERIVADA Y DIFERENCIAL

§ 1.	Velocidad del movimiento	63
§ 2.	Definición de la derivada	64
§ 3.	Interpretación geométrica de la derivada	66
§ 4.	Funciones derivables	68
§ 5.	Cálculo de la derivada de las funciones elementales. Derivada de la función $y = x^n$, siendo n entero y positivo	70
§ 6.	Derivadas de las funciones $y = \text{sen } x$; $y = \text{cos } x$	72
§ 7.	Derivada de una constante, del producto de una constante por una función, de la suma del producto y cociente de dos funciones	74
§ 8.	Derivada de la función logarítmica	79
§ 9.	Derivada de una función compuesta	80
§ 10.	Derivadas de las funciones $y = \text{tg } x$, $y = \text{ctg } x$, $y = \ln x $	83
§ 11.	La función implícita y su derivada	85
§ 12.	Derivadas de la función potencial con exponente real cualquiera, de la función exponencial y de la función exponencial compuesta	87
§ 13.	Función inversa y su derivación	90
§ 14.	Funciones trigonométricas y sus derivadas	94
§ 15.	Tabla de las principales fórmulas de derivación	99
§ 16.	Funciones dadas en forma paramétrica	100
§ 17.	Ecuaciones paramétricas de algunas curvas	102
§ 18.	Derivada de una función dada paraméricamente	105
§ 19.	Funciones hiperbólicas	107
§ 20.	Diferencial	110
§ 21.	Significado geométrico de la diferencial	115
§ 22.	Derivadas de diversos órdenes	116
§ 23.	Diferenciales de órdenes diversos	119
§ 24.	Derivadas de diversos órdenes de las funciones implícitas y de las funciones definidas paraméricamente	120
§ 25.	Interpretación mecánica de la derivada segunda	123
§ 26.	Ecuaciones de la tangente y de la normal. Longitudes de la subtangente y de la subnormal	124
§ 27.	Significado geométrico de la derivada del radio vector respecto al ángulo polar	128

CAPÍTULO IV

TEOREMAS SOBRE LAS FUNCIONES DERIVABLES

§ 1.	Teorema sobre las raíces de la derivada (teorema de Rolle)	145
§ 2.	Teorema de los incrementos finitos (teorema de Lagrange)	147
§ 3.	Teorema sobre el cociente de los incrementos de dos funciones (teorema de Cauchy)	149
§ 4.	Límite del cociente de dos infinitésimos. (Cálculo del límite de indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$)	150

ÍNDICE

IX

§ 5.	Límite del cociente de dos magnitudes infinitamente grandes. (Cálculo del límite de indeterminaciones de la forma $\frac{\infty}{\infty}$) .	153
§ 6.	Fórmulas de Taylor	160
§ 7.	Desarrollo de las funciones e^x $\sin x$ y $\cos x$ mediante la fórmula de Taylor	164

CAPÍTULO V

ANÁLISIS DE LA VARIACIÓN DE LAS FUNCIONES

§ 1.	Generalidades	172
§ 2.	Crecimiento y decrecimiento de una función	173
§ 3.	Máximo y mínimo de las funciones	175
§ 4.	Análisis del máximo y mínimo de una función derivable mediante la primera derivada	181
§ 5.	Análisis del máximo y mínimo de una función mediante la segunda derivada	184
§ 6.	Valores máximo y mínimo de una función en un intervalo	188
§ 7.	Aplicaciones a la teoría de máximos y mínimos de las funciones	190
§ 8.	Análisis de los valores máximos y mínimos de una función mediante la fórmula de Taylor	192
§ 9.	Convexidad y concavidad de las curvas. Puntos de inflexión	195
§ 10.	Asíntotas	201
§ 11.	Esquema general del análisis de funciones y de la construcción de gráficas	207
§ 12.	Estudio de las curvas dadas en forma paramétrica	212

CAPÍTULO VI

CURVATURA DE UNA CURVA

§ 1.	Longitud del arco y su derivada	225
§ 2.	Curvatura	228
§ 3.	Cálculo de la curvatura	230
§ 4.	Cálculo de la curvatura de una curva dada en forma paramétrica	233
§ 5.	Cálculo de la curvatura de una curva dada en coordenadas polares	234
§ 6.	Radio y círculo de curvatura. Centro de curvatura. Evoluta y evolvente	236
§ 7.	Propiedades de la evoluta	242
§ 8.	Cálculo aproximado de las raíces reales de una ecuación	246

CAPÍTULO VII

NÚMEROS COMPLEJOS. POLINOMIOS

§ 1.	Números complejos. Generalidades	255
§ 2.	Operaciones fundamentales con números complejos	257
§ 3.	Elevación a una potencia y extracción de la raíz de un número complejo	260

§ 4.	Función exponencial de exponente complejo y sus propiedades	263
§ 5.	Fórmula de Euler. Forma exponencial de un número complejo	267
§ 6.	Descomposición de un polinomio en factores	268
§ 7.	Raíces múltiples de un polinomio	272
§ 8.	Descomposición en factores de un polinomio con raíces complejas	273
§ 9.	Interpolación. Fórmula de interpolación de Lagrange	275
§ 10.	Fórmula de interpolación de Newton	277
§ 11.	Derivación numérica	279
§ 12.	Aproximación de las funciones mediante polinomios. Teoría de Chebishev	280

CAPÍTULO VIII

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

§ 1.	Definición de las funciones de varias variables	285
§ 2.	Representación geométrica de una función de dos variables	287
§ 3.	Incremento parcial y total de la función	288
§ 4.	Continuidad de las funciones de varias variables	290
§ 5.	Derivadas parciales de la función de varias variables	293
§ 6.	Interpretación geométrica de las derivadas parciales de una función de dos variables	295
§ 7.	Incremento total y diferencial total	296
§ 8.	Aplicación de la diferencial total a cálculos aproximados	300
§ 9.	Aplicación de la diferencial a la evaluación del error en cálculos numéricos	302
§ 10.	Derivada de una función compuesta. Derivada total	306
§ 11.	Derivación de funciones implícitas	309
§ 12.	Derivadas parciales de órdenes superiores	313
§ 13.	Superficies y líneas de nivel	317
§ 14.	Derivadas según una dirección	319
§ 15.	Gradiente	321
§ 16.	Fórmula de Taylor correspondiente a una función de dos variables	325
§ 17.	Máximos y mínimos de una función de varias variables	327
§ 18.	Máximos y mínimos de una función de varias variables relacionadas mediante ecuaciones dadas (máximos y mínimos ligados)	337
§ 19.	Ajuste de una función a unos datos experimentales por el método de mínimos cuadrados	342

CAPÍTULO IX

APLICACIONES DEL CÁLCULO DIFERENCIAL A LA GEOMETRÍA DEL ESPACIO

§ 1.	Ecuaciones de una curva en el espacio	357
§ 2.	Límite y derivada de una función vectorial de una variable independiente escalar. Ecuación de la tangente a una curva. Ecuación del plano normal	360
§ 3.	Reglas de derivación de los vectores (funciones vectoriales)	367
§ 4.	Derivadas primera y segunda de un vector respecto a la longitud del arco. Curvatura de la curva. Norma principal. Velocidad y aceleración de un punto animado de un movimiento curvilíneo	370
§ 5.	Plano osculador. Binormal. Torsión	380
§ 6.	Plano tangente y normal a una superficie	385

CAPÍTULO X

INTEGRAL INDEFINIDA

§ 1.	Función primitiva e integral indefinida	393
§ 2.	Tabla de integrales	396
§ 3.	Propiedades de la integral indefinida	398
§ 4.	Integración por cambio de variable o por sustitución	401
§ 5.	Integración de ciertas funciones que contienen un trinomio de segundo grado	403
§ 6.	Integración por partes	407
§ 7.	Funciones racionales. Fracciones racionales elementales y su integración	411
§ 8.	Descomposición de una fracción racional en fracciones simples	415
§ 9.	Integración de las fracciones racionales	420
§ 10.	Método de Ostrogradski	423
§ 11.	Integración de funciones irracionales	426
§ 12.	Integrales del tipo $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$	428
§ 13.	Integración de las integrales binomias	432
§ 14.	Integración de funciones trigonométricas	435
§ 15.	Integración de funciones irracionales mediante sustituciones trigonométricas	441
§ 16.	Funciones cuyas integrales no pueden expresarse mediante funciones elementales	443

CAPÍTULO XI

INTEGRAL DEFINIDA

§ 1.	Planteamiento del problema. Sumas inferior y superior	458
§ 2.	Integral definida	460
§ 3.	Propiedades fundamentales de la integral definida	467
§ 4.	Cálculo de la integral definida. Fórmula de Newton-Leibniz	472
§ 5.	Cambio de variable en una integral definida	477
§ 6.	Integración por partes	479
§ 7.	Integrales impropias	483
§ 8.	Cálculo aproximado de las integrales definidas	492
§ 9.	Fórmula de Chébishev	498
§ 10.	Integrales dependientes de un parámetro	503
§ 11.	Integración de una función compleja de variable real	507

CAPÍTULO XII

APLICACIONES GEOMÉTRICAS Y MECÁNICAS DE LA INTEGRAL DEFINIDA

§ 1.	Cálculo de áreas en coordenadas rectangulares	513
§ 2.	Área de un sector curvilíneo en coordenadas polares	516
§ 3.	Longitud de un arco de curva	518
§ 4.	Cálculo del volumen de un cuerpo en función de las áreas de secciones paralelas	525

§ 5.	Volumen de un cuerpo de revolución	527
§ 6.	Área de un cuerpo de revolución	528
§ 7.	Cálculo del trabajo mediante la integral definida	530
§ 8.	Coordenadas del centro de gravedad	532
§ 9.	Cálculo de momentos de inercia mediante la integral definida	537

CAPÍTULO XIII

ECUACIONES DIFERENCIALES

§ 1.	Planteamiento del problema	547
§ 2.	Definiciones	551
§ 3.	Ecuaciones diferenciales de primer orden (generalidades)	552
§ 4.	Ecuaciones de variables separadas y separables	557
§ 5.	Ecuaciones homogéneas de primer orden	562
§ 6.	Ecuaciones que se reducen a ecuaciones homogéneas	564
§ 7.	Ecuaciones lineales de primer orden	568
§ 8.	Ecuación de Bernoulli	572
§ 9.	Ecuaciones en diferenciales totales	574
§ 10.	Factor integrante	577
§ 11.	Envoltura de una familia de curvas	579
§ 12.	Soluciones singulares de las ecuaciones diferenciales de primer orden	586
§ 13.	Ecuación de Clairaut	588
§ 14.	Ecuación de Lagrange	590
§ 15.	Trayectorias ortogonales e isogonales	592
§ 16.	Ecuaciones diferenciales de orden superior a uno (generalidades)	599
§ 17.	Ecuación de la forma $y^{(n)} = f(x)$	600
§ 18.	Algunos tipos de ecuaciones diferenciales de segundo orden que se reducen a ecuaciones de primer orden	603
§ 19.	Método gráfico de integración de las ecuaciones diferenciales de segundo orden	613
§ 20.	Ecuaciones lineales homogéneas. Definiciones y propiedades generales	616
§ 21.	Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes	623
§ 22.	Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de n -ésimo orden con coeficientes constantes	628
§ 23.	Ecuaciones diferenciales no homogéneas de segundo orden	631
§ 24.	Ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes	635
§ 25.	Ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas de orden n	642
§ 26.	Ecuación diferencial de las oscilaciones mecánicas	647
§ 27.	Oscilaciones libres	649
§ 28.	Oscilaciones forzadas	652
§ 29.	Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias	656
§ 30.	Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes	663
§ 31.	Nociones sobre la teoría de la estabilidad de Liapunov	670
§ 32.	Solución aproximada de las ecuaciones diferenciales de primer orden por el método de Euler	676
§ 33.	Solución aproximada de las ecuaciones diferenciales por el método de las diferencias, basado en el empleo de la fórmula de Taylor. Método de Adams	679
§ 34.	Método aproximado de integración de los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden	686

CAPÍTULO XIV

INTEGRALES MÚLTIPLES

§	1. Integral doble	707
§	2. Cálculo de la integral doble	710
§	3. Cálculo de la integral doble (continuación)	717
§	4. Cálculo de áreas y volúmenes mediante integrales dobles	724
§	5. Integrales dobles en coordenadas polares	727
§	6. Cambio de variables en una integral doble (caso general)	735
§	7. Cálculo de áreas de superficies	740
§	8. Densidad de distribución de la materia e integral doble	744
§	9. Momento de inercia de una figura plana	745
§	10. Coordenadas del centro de gravedad de una figura plana	751
§	11. Integral triple	753
§	12. Cálculo de integrales triples	754
§	13. Cambio de variables en una integral triple	761
§	14. Momento de inercia y coordenadas del centro de gravedad de un cuerpo	764
§	15. Cálculo de las integrales dependientes de un parámetro	766

CAPÍTULO XV

INTEGRALES CURVILÍNEAS E INTEGRALES DE SUPERFICIE

§	1. Integral curvilínea	775
§	2. Cálculo de la integral curvilínea	779
§	3. Fórmula de Green	786
§	4. Condiciones para que una integral curvilínea no dependa del camino de integración	788
§	5. Integral de superficie	794
§	6. Cálculo de la integral de superficie	796
§	7. Fórmula de Stokes	799
§	8. Fórmula de Ostrogradski	805
§	9. Operador de Hamilton y algunas de sus aplicaciones	808

CAPÍTULO XVI

SERIES

§	1. Serie. Suma de una serie	820
§	2. Condición necesaria de convergencia de una serie	823
§	3. Comparación de series de términos positivos	827
§	4. Criterio de d'Alembert	829
§	5. Criterio de Cauchy	833
§	6. Criterio integral de convergencia	835
§	7. Series alternadas. Teorema de Leibniz	839
§	8. Series de términos positivos y negativos. Convergencia absoluta y condicional	841
§	9. Series de funciones	845

§ 10.	Series mayorables	847
§ 11.	Continuidad de la suma de una serie	849
§ 12.	Integración y derivación de las series	852
§ 13.	Series de potencias. Intervalo de convergencia	855
§ 14.	Derivación de las series de potencias	860
§ 15.	Series de potencias de $x - a$	862
§ 16.	Series de Taylor y de Maclaurin	863
§ 17.	Ejemplos de desarrollo de funciones en series	865
§ 18.	Fórmula de Euler	867
§ 19.	Serie binomial	867
§ 20.	Desarrollo de la función $\ln(1 + x)$ en serie de potencias. Cálculo de logaritmos	870
§ 21.	Aplicación de las series al cálculo de integrales definidas	873
§ 22.	Aplicación de las series a la integración de ecuaciones diferenciales	875
§ 23.	Ecuación de Bessel	878

CAPÍTULO XVII

SERIES DE FOURIER

§ 1.	Definición. Planteamiento del problema	895
§ 2.	Ejemplos de desarrollo de funciones en serie de Fourier	899
§ 3.	Una observación sobre el desarrollo de funciones periódicas en serie de Fourier	904
§ 4.	Series de Fourier de funciones pares e impares	907
§ 5.	Serie de Fourier de funciones de período $2l$	908
§ 6.	Desarrollo de una función no periódica en serie de Fourier	910
§ 7.	Aproximación en media de una función dada mediante polinomios trigonométricos	912
§ 8.	Integral de Dirichlet	918
§ 9.	Convergencia de una serie de Fourier en un punto dado	921
§ 10.	Algunas condiciones suficientes para la convergencia de una serie de Fourier	923
§ 11.	Análisis armónico numérico	927
§ 12.	Integral de Fourier	928
§ 13.	Integral de Fourier en forma compleja	932

CAPÍTULO XVIII

APLICACIONES FÍSICAS

§ 1.	Tipos fundamentales de ecuaciones de la física matemática	937
§ 2.	Ecuación de las oscilaciones de una cuerda	938
§ 3.	Solución de la ecuación de vibraciones de una cuerda por el método de separación de las variables (método de Fourier)	942
§ 4.	Ecuación de difusión del calor de un vástago. Planteamiento del problema con condiciones de contorno	946
§ 5.	Difusión del calor en el espacio	948
§ 6.	Solución del primer problema de contorno para la ecuación de conducción del calor por el método de diferencias finitas	952
§ 7.	Difusión del calor en un vástago ilimitado	955

ÍNDICE

XV

§ 8.	Problemas que conducen a la búsqueda de las soluciones de la ecuación de Laplace. Planteamiento de los problemas de contorno	960
§ 9.	Ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas. Solución del problema de Dirichlet para un anillo circular con valores constantes de la función desconocida en las circunferencias interna y externa	966
§ 10.	Solución del problema de Dirichlet para un círculo	968
§ 11.	Solución del problema de Dirichlet por el método de diferencias finitas	972

CAPÍTULO XIX

CÁLCULO OPERACIONAL Y ALGUNAS DE SUS APLICACIONES

§ 1.	Función inicial y su transformación	980
§ 2.	Transformadas de las funciones $\sigma_0(t)$, $\text{sen } t$, $\text{cos } t$	982
§ 3.	Transformada de la función con escala modificada de la variable independiente	984
§ 4.	Propiedad de linealidad de la transformada	985
§ 5.	Teorema del desplazamiento	986
§ 6.	Transformadas de las funciones e^{-at} , $\text{Sh } at$, $\text{Ch } at$, $e^{-at} \text{cos } at$	986
§ 7.	Derivación de la transformada	988
§ 8.	Recurrencia entre las derivadas	990
§ 9.	Tabla de transformadas	991
§ 10.	Aplicación de la transformada de Laplace a la resolución de una ecuación diferencial dada	993
§ 11.	Transformadas de fracciones racionales	998
§ 12.	Ejemplos de solución de ecuaciones diferenciales y sistemas de ecuaciones diferenciales por el método operacional	1000
§ 13.	Teorema del plegamiento	1002
§ 14.	Ecuaciones diferenciales de las oscilaciones mecánicas y ecuaciones diferenciales de la teoría de circuitos eléctricos	1004
§ 15.	Solución de la ecuación diferencial de las oscilaciones	1006
§ 16.	Estudio de las oscilaciones libres	1008
§ 17.	Estudio de las oscilaciones mecánicas y eléctricas en caso de aplicación de una fuerza exterior periódica	1008
§ 18.	Solución de la ecuación de las oscilaciones en el caso de resonancia	1011
§ 19.	Teorema del retardo	1012