

FACULTAD DE CIENCIA  
Y TECNOLOGÍA  
**BIBLIOTECA**

Sede Paraná - 02



# CONTENIDO

## Capítulo 1. EL ALGEBRA DE LOS NUMEROS REALES

|      |                                                                          |    |
|------|--------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1  | Introducción .....                                                       | 13 |
| 1.2  | Suma y multiplicación de números reales .....                            | 13 |
| 1.3  | Campos .....                                                             | 22 |
| 1.4  | El orden en los números reales .....                                     | 23 |
| 1.5  | Relaciones de orden y campos ordenados .....                             | 34 |
| 1.6  | Los enteros positivos y el principio de inducción .....                  | 36 |
| 1.7  | Los números enteros y los números racionales .....                       | 40 |
| 1.8  | El postulado de Arquímedes; el postulado de compleción de Euclides ..... | 42 |
| 1.9  | El lenguaje y nomenclatura de grupos .....                               | 46 |
| 1.10 | Sumas y productos de grado $n$ ; la ley asociativa generalizada ..       | 49 |
| 1.11 | El cierre de los enteros en la suma y la multiplicación .....            | 53 |

## Capítulo 2. GEOMETRIA DE INCIDENCIA EN PLANOS Y EN EL ESPACIO .....

57

## Capítulo 3. DISTANCIA Y CONGRUENCIA

|     |                                                                  |    |
|-----|------------------------------------------------------------------|----|
| 3.1 | La idea de una función .....                                     | 63 |
| 3.2 | Funciones y relaciones interpretadas en teoría de conjuntos .... | 68 |
| 3.3 | La función distancia .....                                       | 72 |
| 3.4 | El concepto de "posición intermedia" o separación en una línea   | 76 |
| 3.5 | Segmentos, rayos, ángulos y triángulos .....                     | 82 |
| 3.6 | Congruencia de segmentos .....                                   | 86 |

## Capítulo 4. SEPARACION EN PLANOS Y EN EL ESPACIO

|     |                                                                              |     |
|-----|------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.1 | Convexidad y separación .....                                                | 91  |
| 4.2 | Teoremas de incidencia basados en el postulado de separación de planos ..... | 94  |
| 4.3 | Teoremas de incidencia, continuación .....                                   | 99  |
| 4.4 | Cuadriláteros convexos .....                                                 | 103 |
| 4.5 | Separación del espacio por medio de planos .....                             | 105 |

## Capítulo 5. MEDIDA ANGULAR

|     |                                    |     |
|-----|------------------------------------|-----|
| 5.1 | Medida de los ángulos en grados .. | 109 |
|-----|------------------------------------|-----|

## Capítulo 6. CONGRUENCIAS ENTRE TRIANGULOS

|     |                                              |     |
|-----|----------------------------------------------|-----|
| 6.1 | La idea de una congruencia .....             | 117 |
| 6.2 | Los teoremas de congruencia básicos .....    | 121 |
| 6.3 | Algunos comentarios sobre terminología ..... | 128 |

|                                                                         |                                                                                                     |            |
|-------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 6.4                                                                     | La independencia del postulado <i>LAL</i> .....                                                     | 130        |
| 6.5                                                                     | Existencia de perpendiculares .....                                                                 | 132        |
| <b>Capítulo 7. DESIGUALDADES GEOMETRICAS .....</b>                      |                                                                                                     | <b>135</b> |
| <b>Capítulo 8. EL PROGRAMA EUCLIDIANO: CONGRUENCIA SIN DISTANCIA</b>    |                                                                                                     |            |
| 8.1                                                                     | Los postulados sintéticos .....                                                                     | 145        |
| 8.2                                                                     | Angulos rectos, considerados sintéticamente .....                                                   | 148        |
| 8.3                                                                     | Desigualdades geométricas, consideradas sintéticamente .....                                        | 152        |
| 8.4                                                                     | Demostraciones de las leyes de desigualdad para segmentos ...                                       | 155        |
| 8.5                                                                     | Resumen de las diferencias entre los enfoques métrico y sintético                                   | 160        |
| <b>Capítulo 9. TRES GEOMETRIAS</b>                                      |                                                                                                     |            |
| 9.1                                                                     | Introducción .....                                                                                  | 161        |
| 9.2                                                                     | El modelo de Poincaré para la geometría lobachevskiana .....                                        | 162        |
| 9.3                                                                     | El modelo esférico para la geometría riemanniana .....                                              | 167        |
| 9.4                                                                     | Algunos temas para investigación superior .....                                                     | 169        |
| <b>Capítulo 10. GEOMETRIA PLANA ABSOLUTA</b>                            |                                                                                                     |            |
| 10.1                                                                    | Condiciones suficientes para paralelismo .....                                                      | 171        |
| 10.2                                                                    | La desigualdad poligonal .....                                                                      | 174        |
| 10.3                                                                    | Cuadriláteros de Saccheri .....                                                                     | 174        |
| 10.4                                                                    | La desigualdad básica para sumas de ángulos en un triángulo .                                       | 178        |
| 10.5                                                                    | Una comedia histórica .....                                                                         | 181        |
| <b>Capítulo 11. EL POSTULADO DE LAS PARALELAS Y PROYECCION PARALELA</b> |                                                                                                     |            |
| 11.1                                                                    | La unicidad de las paralelas .....                                                                  | 183        |
| 11.2                                                                    | Proyecciones paralelas .....                                                                        | 186        |
| 11.3                                                                    | El teorema de comparación .....                                                                     | 190        |
| 11.4                                                                    | El teorema básico de semejanza .....                                                                | 190        |
| <b>Capítulo 12. SEMEJANZAS ENTRE TRIANGULOS</b>                         |                                                                                                     |            |
| 12.1                                                                    | Proporcionalidades .....                                                                            | 195        |
| 12.2                                                                    | Semejanzas entre triángulos .....                                                                   | 196        |
| 12.3                                                                    | El teorema de Pitágoras .....                                                                       | 202        |
| <b>Capítulo 13. REGIONES POLIGONALES Y SUS AREAS</b>                    |                                                                                                     |            |
| 13.1                                                                    | Los postulados de área .....                                                                        | 209        |
| 13.2                                                                    | Teoremas de área para triángulos y cuadriláteros .....                                              | 213        |
| 13.3                                                                    | Aplicaciones de la teoría del área: una demostración sencilla del teorema básico de semejanza ..... | 218        |
| 13.4                                                                    | Otras aplicaciones de la teoría del área: el teorema de Pitágoras .....                             | 220        |
| 13.5                                                                    | Una forma más débil del postulado de unidad A-5 .....                                               | 223        |

**Capítulo 14. LA CONSTRUCCION DE UNA FUNCION DE AREA**

|                                                                            |     |
|----------------------------------------------------------------------------|-----|
| 14.1 El problema .....                                                     | 227 |
| 14.2 Complejos y sus áreas de fórmula .....                                | 229 |
| 14.3 Verificación de los postulados de área para la función $\alpha$ ..... | 235 |

**Capítulo 15. LINEAS Y PLANOS PERPENDICULARES EN EL ESPACIO**

|                                                                  |     |
|------------------------------------------------------------------|-----|
| 15.1 Los teoremas básicos .....                                  | 237 |
| 15.2 Líneas y planos paralelos en el espacio .....               | 243 |
| 15.3 La medida de un ángulo diedro: planos perpendiculares ..... | 246 |

**Capítulo 16. CIRCULOS Y ESFERAS**

|                                                                |     |
|----------------------------------------------------------------|-----|
| 16.1 Definiciones básicas .....                                | 249 |
| 16.2 Líneas secante y tangente. El teorema línea-círculo ..... | 251 |
| 16.3 Planos secantes y tangentes .....                         | 254 |
| 16.4 Arcos de círculos .....                                   | 256 |
| 16.5 El teorema de los dos círculos .....                      | 262 |

**Capítulo 17. MOVIMIENTO RIGIDO**

|                                                   |     |
|---------------------------------------------------|-----|
| 17.1 El concepto más general de congruencia ..... | 269 |
| 17.2 Isometrías entre triángulos .....            | 272 |

**Capítulo 18. SISTEMAS COORDENADOS CARTESIANOS**

|                                               |     |
|-----------------------------------------------|-----|
| 18.1 Coordenadas, ecuaciones y gráficas ..... | 277 |
|-----------------------------------------------|-----|

**Capítulo 19. CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPAS**

|                                                                                                 |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 19.1 Reglas no graduadas y compases plegables .....                                             | 285 |
| 19.2 Cómo hacer álgebra con regla y compás .....                                                | 290 |
| 19.3 Resolución de ecuaciones con regla y compás .....                                          | 292 |
| 19.4 El problema de Apolonio .....                                                              | 297 |
| 19.5 Los problemas de construcción imposible de la antigüedad ....                              | 301 |
| 19.6 El campo surd .....                                                                        | 302 |
| 19.7 El plano surd .....                                                                        | 305 |
| 19.8 Extensiones cuadráticas de campos. Conjugados en un campo<br>de extensión cuadrática ..... | 307 |
| 19.9 Campos surd de orden $n$ ; surds de orden $n$ .....                                        | 311 |
| 19.10 Aplicaciones a ecuaciones cúbicas con coeficientes racionales                             | 313 |
| 19.11 La trisección del ángulo .....                                                            | 314 |
| 19.12 La duplicación del cubo .....                                                             | 318 |

**Capítulo 20. DE EUDOXIO A DEDEKIND**

|                                                                   |     |
|-------------------------------------------------------------------|-----|
| 20.1 Proporcionalidades sin números .....                         | 319 |
| 20.2 La definición sintética de proporcionalidad de Eudoxio ..... | 321 |
| 20.3 El álgebra de suma de segmentos .....                        | 326 |
| 20.4 Cómo definir razones: la mínima cota superior .....          | 328 |
| 20.5 Demostración del teorema de adición .....                    | 332 |

|      |                                          |     |
|------|------------------------------------------|-----|
| 20.6 | El teorema de metrización .....          | 338 |
| 20.7 | El método de Dedekind (cortaduras) ..... | 343 |

#### Capítulo 21. LONGITUD Y AREA PLANA

|      |                                                             |     |
|------|-------------------------------------------------------------|-----|
| 21.1 | La definición de longitud de arco .....                     | 345 |
| 21.2 | La existencia de $\pi$ .....                                | 348 |
| 21.3 | Límites cuando la malla tiende a cero .....                 | 350 |
| 21.4 | El teorema de adición para longitud de arco .....           | 354 |
| 21.5 | Acercamiento al área de un sector circular por abajo .....  | 356 |
| 21.6 | Acercamiento al área de un sector circular por arriba ..... | 359 |
| 21.7 | El área de un sector .....                                  | 360 |

#### Capítulo 22. LA MEDIDA DE JORDAN EN EL PLANO

|      |                                                          |     |
|------|----------------------------------------------------------|-----|
| 22.1 | La definición básica .....                               | 363 |
| 22.2 | La clase de conjuntos medibles .....                     | 366 |
| 22.3 | Las áreas bajo las gráficas de funciones continuas ..... | 374 |

#### Capítulo 23. MEDICION SOLIDA: LA TEORIA ELEMENTAL

|      |                                                      |     |
|------|------------------------------------------------------|-----|
| 23.1 | Suposiciones básicas para la teoría de volumen ..... | 379 |
| 23.2 | Secciones transversales de conos y pirámides .....   | 381 |
| 23.3 | Prismas y cilindros .....                            | 385 |
| 23.4 | Volúmenes de prismas y cilindros .....               | 387 |
| 23.5 | Volúmenes de pirámides y conos .....                 | 390 |
| 23.6 | El volumen de una esfera .....                       | 393 |

#### Capítulo 24. GEOMETRIA HIPERBOLICA

|       |                                                                                                   |     |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 24.1  | Geometría absoluta, continuación: la función crítica .....                                        | 397 |
| 24.2  | Geometría absoluta: triángulos abiertos y rayos críticamente paralelos .....                      | 403 |
| 24.3  | Geometría hiperbólica: triángulos cerrados y sumas de ángulos .....                               | 410 |
| 24.4  | Geometría hiperbólica: el defecto de un triángulo y el colapso de la teoría de la semejanza ..... | 414 |
| 24.5  | Geometría absoluta: triangulaciones y subdivisiones .....                                         | 418 |
| 24.6  | Geometría euclidiana: el teorema de Bolyai .....                                                  | 423 |
| 24.7  | Teoría del área hiperbólica: el defecto de una región poligonal .....                             | 426 |
| 24.8  | El teorema de Bolyai para triángulos en el caso hiperbólico ...                                   | 429 |
| 24.9  | Defectos de triángulos pequeños .....                                                             | 434 |
| 24.10 | La continuidad del defecto .....                                                                  | 435 |
| 24.11 | El teorema de Bolyai para regiones poligonales en el caso hiperbólico .....                       | 439 |
| 24.12 | La imposibilidad de la teoría de área euclidiana en la geometría hiperbólica .....                | 439 |
| 24.13 | La unicidad de la teoría hiperbólica del área .....                                               | 442 |
| 24.14 | Formas alternativas del postulado de las paralelas .....                                          | 444 |



**Capítulo 25. LA CONSISTENCIA DE LOS POSTULADOS  
HIPERBOLICOS**

|      |                                                                               |     |
|------|-------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 25.1 | Introducción .....                                                            | 445 |
| 25.2 | Inversiones de un plano perforado .....                                       | 445 |
| 25.3 | Preservación de la relación transversal bajo inversiones .....                | 450 |
| 25.4 | Preservación de la medida angular bajo inversiones .....                      | 452 |
| 25.5 | Reflexiones transversales a las líneas $L$ en el modelo de Poincaré .....     | 455 |
| 25.6 | Singularidad de la línea $L$ a través de dos puntos .....                     | 458 |
| 25.7 | El postulado de la regla, valores intermedios y separación de<br>planos ..... | 459 |
| 25.8 | Medida angular en el modelo de Poincaré .....                                 | 463 |
| 25.9 | El postulado $LAL$ .....                                                      | 464 |

**Capítulo 26. LA CONSISTENCIA DE LA GEOMETRIA EUCLIDIANA**

|      |                                  |     |
|------|----------------------------------|-----|
| 26.1 | Introducción .....               | 467 |
| 26.2 | El postulado de la regla .....   | 468 |
| 26.3 | Incidencia y paralelismo .....   | 469 |
| 26.4 | Translaciones y rotaciones ..... | 471 |
| 26.5 | Separación de planos .....       | 476 |
| 26.6 | Congruencias de ángulos .....    | 478 |

**Capítulo 27. EL METODO POSTULACIONAL**

|      |                                                              |     |
|------|--------------------------------------------------------------|-----|
| 27.1 | Introducción .....                                           | 485 |
| 27.2 | Los postulados considerados como verdades autoevidentes .... | 485 |
| 27.3 | Conjuntos de postulados categóricos .....                    | 487 |
| 27.4 | El uso de conjuntos de postulados como codificaciones .....  | 490 |
| 27.5 | El uso de postulados por razones de conveniencia .....       | 492 |

**Capítulo 28. UN EJEMPLO DE UN CAMPO ORDENADO QUE NO ES UN  
CAMPO ARQUIMEDIANO .....**

493

**Capítulo 29. LA TEORIA DE LOS NUMEROS .....**

501

**Capítulo 30. LA TEORIA DE LAS ECUACIONES .....**

507

**Capítulo 31. LIMITES DE SECUENCIAS**

|      |                                                  |     |
|------|--------------------------------------------------|-----|
| 31.1 | La definición de un límite para secuencias ..... | 513 |
|------|--------------------------------------------------|-----|

**Capítulo 32. CONJUNTOS CONTABLES E INCONTABLES .....**

519

**INDICE .....**

525